Voraussetzungen und Ziele

Die Behandlung der Exponentialfunktionen in modernen Schulbüchern hat sich zu weit von Mathematik entfernt. Ich mache zunächst Vorschläge, die sich auch **einzeln** in den Unterricht einbauen lassen und die auf mathematischen Argumenten beruhen. Deshalb vermeide ich hier (nur hier) die Diskussion darüber, dass mit der Definition von Grenzwerten überhaupt nicht mehr argumentiert wird und mache **folgende Voraussetzungen**:

> Die Behandlung von $a^{m/n}$ sei samt den Potenzgesetzen irgendwie erledigt und es soll jetzt über Ableitungseigenschaften von 2^x gesprochen werden, um danach e^x einzuführen. Zunächst reichere ich das, was in den Büchern gemacht wird, mit mathematischen Argumenten an. Meine Werkzeuge dabei sind die Quotientenregel und der Monotoniesatz. – Eine vollständige Definition von $a^x, x \notin \mathbb{Q}$ **ohne** Differentialrechnung folgt auf S.8-10 – mit anschließender Bestimmung der Ableitung von $x \mapsto a^x$.

Anwendungen der einfachsten Form des Monotoniesatzes:
$f'(x) = 0$ für $x \in [a, b]$ impliziert f ist konstant auf $[a, b]$.

Folgende Umformung der Differenzenquotienten habe ich in allen betrachteten Büchern gesehen:

$$\frac{2^{x+h} - 2^x}{h} = 2^x \cdot \frac{2^h - 2^0}{h}.$$

Zum Differenzieren der Funktion $f(x) = 2^x$ genügt es also, die Ableitung bei $x = 0$ zu bestimmen. Es wird in den Schulbüchern vorgeschlagen, kleine und noch kleinere Werte von h zu wählen und mit dem TR den Differenzenquotienten auszurechnen – wobei jede Warnung fehlt, dass das für $h < 10^{-10}$ nicht mehr geht.
Stattdessen schlage ich Ungleichungen vor. Für $h \geq 10^{-5}$ kann man sich auf die Werte des TR noch einigermaßen verlassen und es gilt mit *linksseitigen und rechtsseitigen* Differenzenquotienten, also auf den Intervallen $[-h, 0]$ und $[0, h]$:

$$\frac{2^0 - 2^{-h}}{h} < f'(0) < \frac{2^h - 2^0}{h}, \qquad h = 2^{-10} \;\Rightarrow\; 0,6929 < f'(0) < 0,6934$$

Man hat nicht nur Fehlerschranken, der Mittelwert $(2^h - 2^{-h})/2h \approx 0{,}69314723$ $(h = 2^{-10})$ aus linksseitigem und rechtsseitigem Differenzenquotienten stimmt sogar auf 6 Stellen mit $f'(0) \approx 0,69314718$ überein! Mit $c := f'(0)$ hat man dann die Ableitung $f'(x) = c \cdot f(x)$. Dies ist keine Herleitung der Ableitung, legt aber in besserer Weise nahe, dass man diese Ableitung erwarten darf.

In den Büchern wird dann weiter empfohlen, den TR zum Experimentieren mit anderen Basen zu benutzen und so eine Exponentialfunktion $g(x)$ zu suchen, für die $g'(x) = 1 \cdot g(x)$ gilt. Ich schlage stattdessen vor, an die Kettenregel zu erinnern und nachzurechnen, dass diese Ableitungseigenschaft für die Funktion $g(x) := f(x/c) = 2^{x/c}$ gilt! Beim Differenzieren von f können die SuS die Zahl c natürlich nicht wiedererkennen – aber wenn sie jetzt dieselbe Rechnung für g machen, dann erwarten sie $g'(0) = 1$ und sie können daher ihr TR-Ergebnis auf seine Genauigkeit (und seine h-Abhängigkeit) **überprüfen**.

Ich erinnere daran, dass 2^x für irrationale x nicht definiert wurde und dass daher auch die Potenzgesetze nur unvollkommen begründet werden konnten. Die für 2^x nahe gelegte

Ableitungseigenschaft erlaubt nun, die Sache von einer anderen Seite zu betrachten. Wir zeigen erstens: Eine Funktion g mit den Eigenschaften

$$g(0) = 1,\ g'(x) = c \cdot g(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \ (c \in \mathbb{R} \text{ beliebig})$$

ist hierdurch eindeutig bestimmt (womit **nicht** gesagt ist, wie man sie finden kann). Und wir zeigen zweitens: **jede** solche Funktion erfüllt die Potenzgesetze.

Erstens: zwei **positive** Funktionen g_1, g_2, für die auf $\mathbb{R}$ gilt:

$$g_1(0) = 1 = g_2(0) \text{ und } g_1' = c \cdot g_1,\ g_2' = c \cdot g_2,$$

stimmen überein.

Definiere dazu die Hilfsfunktion $h(x) := g_1(x)/g_2(x)$, berechne mit $(1/g_2)' = -g_2'/(g_2)^2$ deren Ableitung

$$h'(x) = g_1'(x)/g_2(x) + g_1(x) \cdot (-g_2'(x))/g_2(x)^2 = c \cdot (g_1(x)/g_2(x) - g_1(x)/g_2(x)) = 0$$

und folgere daraus mit der einfachsten Form des Monotoniesatzes:

$$h(x) = const = h(0) = 1, \text{ also } g_1(x) = g_2(x).$$

Auf ähnliche Weise folgt das **wichtige Potenzgesetz** und zwar für alle $a, x \in \mathbb{R}$

$$\boxed{g(x + a) = g(a) \cdot g(x).}$$

Differenziere dazu die Hilfsfunktion $h(x) := g(x + a)/g(x)$ und folgere mit $g' = c \cdot g$ wie eben, dass $h'(x) = 0$ gilt. Dann folgt

$$h(x) = const = h(0) = g(a) \text{ oder } g(x + a) = g(a) \cdot g(x).$$

Auf dieselbe Weise folgt $h(x) := g(x) \cdot g(-x) = 1$, also $g(-x) = 1/g(x)$.

Da uns Potenzfunktionen x^a mit irrationalem a noch nicht zur Verfügung stehen (also uns auch die Ableitung $a \cdot x^{a-1}$ fehlt), beweisen wir die letzte Potenzregel, $g(a \cdot x) = g(x)^a$, jetzt nur für $a \in \mathbb{Q}$ (und weiterhin $g' = c \cdot g$):
Für $h_1(x) = g(a \cdot x)$ gilt mit der (Proportional-)Kettenregel $h_1'(x) = a \cdot g'(a \cdot x) = a \cdot c \cdot h_1(x)$.
Für $h_2(x) = g(x)^a$ gilt mit der Kettenregel $h_2'(x) = a \cdot g(x)^{a-1} \cdot g'(x) = a \cdot c \cdot h_2(x)$.
Daher gilt für den Quotienten $h(x) := h_1(x)/h_2(x)$ wieder $h'(x) = 0$, also $h(x) = h(0) = 1$.
Insbesondere hat man also mit $x = 1$:

$$g(a) = g(1)^a,\ a \in \mathbb{R}.$$

Daher heißen alle Funktionen mit der von oben zitierten Eigenschaft:

$$g(0) = 1,\ g'(x) = c \cdot g(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

Exponentialfunktionen zur Basis $g(1)$.

Es liegt nahe, die Exponentialfunktion mit $c = 1$ als etwas Besonderes anzusehen. Sie heißt *natürliche Exponentialfunktion* und wird mit $\exp(x)$ bezeichnet. Die Basis $e := \exp(1)$ heißt *Eulersche Zahl*. Die anderen Exponentialfunktionen gewinnt man aus ihr in einfacher Weise:

$$g(x) := \exp(c \cdot x) \text{ erfüllt: } g' = c \cdot g.$$

Wir wenden uns nun dem Problem zu, Exponentialfunktionen für alle $x \in \mathbb{R}$ zu definieren. Zunächst mit Hilfe der Differentialrechnung für rationale Funktionen, danach auf den Seiten 8 - 10 ohne dies Hilfsmittel.

Approximation von Exponentialfunktionen mit Hilfe des Monotoniesatzes:

$x < y \in [a,b]$ und $f' \geq 0$ in $[a,b]$ impliziert $f(x) \leq f(y)$ ("f ist schwach wachsend").

Es ist fair, den SuS mitzuteilen, dass für alle rationalen $x = m/n \neq 0$ die Werte $\exp(x)$ sogenannte transzendente Zahlen sind. Das bedeutet, dass außer $\exp(0) = 1$ kein Rechner der Welt die Werte $\exp(x)$ exakt ausrechnen kann: *Es werden nur Approximationen ausgegeben!* Es ist nicht schwer, für Schülerinnen und Schüler verständliche Approximationen anzugeben, obwohl heutige Schulbücher keine Zeile darauf verwenden.

Eigentlich existiert eine Analysis ohne Ungleichungen nicht. Trotzdem sind sie weitgehend aus den Schulbüchern verschwunden. Immerhin kommt vor: "Aus $f' \geq 0$ folgt f ist schwach wachsend". Das verallgemeinert sich unmittelbar zu: "Aus $f' \leq g'$ folgt f ist schwächer wachsend als g", oder, dieser **Monotoniesatz mit Ungleichungen**:

$$\boxed{f' \leq g' \text{ und } x \leq y \text{ impliziert } f(y) - f(x) \leq g(y) - g(x) \text{ oder } g(x) - f(x) \leq g(y) - f(y).}$$

Es folgt ein Wechselspiel aus Heuristik und Argumentation.
Aus $\exp'(0) = \exp(0) = 1$ ergibt sich die Tangente bei $x = 0$ zu: $t(x) = 1 + x$. Wir erwarten wegen der Bilder des Graphen der Exponentialfunktion, dass wir zeigen können

$$-1 < x \Rightarrow 1 + x \leq \exp(x).$$

(Für $x \leq -1$ gilt die Ungleichung wegen $\exp(x) > 0$.) Um den Monotoniesatz auf die Quotientenfunktion $q(x) := \exp(x)/(1+x)$ anzuwenden, berechnen wir deren Ableitung

$$q'(x) = \frac{\exp(x)}{1+x} - \frac{\exp(x)}{(1+x)^2}, \text{ also: } 0 < x \implies q'(x) > 0, \quad -1 < x < 0 \implies q'(x) < 0.$$

Diese Funktion q hat also bei $x = 0$ das Minimum $q(0) = 1$, wir haben: $1 + x \leq \exp(x)$.
Daraus folgt mit der schon bewiesenen Potenzregel (oder mit dem Monotoniesatz):

$$-n < x \;\Rightarrow\; h_n(x) := (1 + x/n)^n \leq \exp(x/n)^n = \exp(x).$$

Das läßt sich schon bedeutend besser an als der einzige Schulbuchhinweis auf Beweise im Abschnitt Exponentialfunktionen: *"Man kann zeigen, dass:* $\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n = e$*"*, denn wir haben für alle $x > -n$ schon gezeigt $(1 + x/n)^n \leq \exp(x)$ und die Abschätzung nach der anderen Seite folgt gleich. – Der Beweis, dass die Funktionenfolge $(1+x/n)^n$ für $x \geq 0$ mit n wächst, ist vergleichbar schwierig wie der Monotoniebeweis für $(1+1/n)^n$. Aber der Beweis für die Funktionenfolge zeigt erheblich mehr. Dazu benutzen wir als Hilfsmittel die zu dem Problem passende Quotientenfunktion $q := h_{n+1}/h_n$, die sich für $x \geq 0$ als schwach wachsend ergibt, weil $1 + x/(n+1) \leq 1 + x/n$ ist:

$$q(x) = \frac{(1 + x/(n+1))^{n+1}}{(1+x/n)^n} \text{ mit } q'(x) = \frac{(1 + x/(n+1))^n}{(1+x/n)^n} - \frac{(1 + x/(n+1))^{n+1}}{(1+x/n)^{n+1}}$$

$$q'(x) = \frac{(1 + x/(n+1))^n}{(1+x/n)^n} \cdot \left(1 - \frac{1 + x/(n+1)}{1+x/n}\right) \geq 0.$$

Daraus, dass wir mit $(1 + x/n)^n$ eine monoton wachsende Funktionenfolge haben, die unterhalb der (noch zu definierenden) Exponentialfunktion bleibt, folgt natürlich **nicht**, dass diese Folge gegen die Exponentialfunktion konvergiert (auch wenn TR-Experimente diese Vermutung unterstützen).

Wir vermuten, dass $1/\exp(x) = \exp(-x)$ aus unseren Unterfunktionen Oberfunktionen machen könnte. Wir definieren also die Funktionen

$$H_n(x) := \frac{1}{h_n(-x)} = \frac{1}{(1-x/n)^n} \quad \text{mit} \quad H_n'(x) = \frac{1}{(1-x/n)^{n+1}},$$

natürlich mit der Einschränkung $0 \le x < n$. Betrachte wieder die passende Quotientenfunktion $Q(x) := H_n(x)/\exp(x)$, differenziere und folgere mit dem Monotoniesatz, dass Q schwach wachsend ist:

$$0 \le x < n \Rightarrow Q'(x) = \frac{H_n(x)}{\exp(x)} \cdot \left(\frac{1}{1-x/n} - 1 \right) \ge 0,$$

$$\text{also: } 1 = Q(0) \le Q(x) \text{ oder } \exp(x) \le \frac{1}{(1-x/n)^n}.$$

Damit sind wir fast am Ziel und jedenfalls schon weit besser als: *"Man kann zeigen, dass:* $\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n = e$*"*. Denn den Unterschied zwischen unseren Ober- und Unterfunktionen kann man direkt abschätzen (wähle $n > 2x^2$, erst zur Vermeidung von Nenner-Nullstellen, dann zur Vereinfachung $1 - x^2/n > 1/2$):

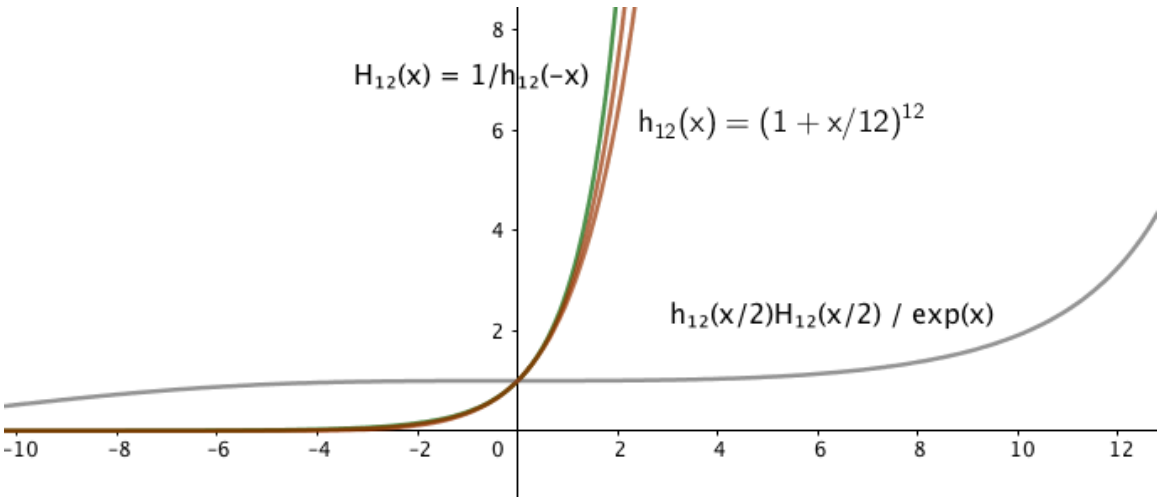
$$(U)\ \ 0 \le H_n(x) - h_n(x) = (1+\frac{x}{n})^n \left(\frac{1}{(1-x^2/n^2)^n} - 1 \right) \le \frac{\exp(x)}{1-x^2/n} \cdot \frac{x^2}{n} < \frac{2\exp(x)x^2}{n}.$$

Für die Hauptungleichung haben wir im Nenner $(1-x^2/n^2)^n \ge 1 - x^2/n$ benutzt. Das folgt mit $y = x^2/n^2$ aus der Bernoullischen Ungleichung $(1-y)^n \ge 1 - ny$. Und diese Ungleichung folgt – weil beide Seiten bei $y = 0$ übereinstimmen und die Ableitung der linken Seite für $0 < y < 1$ größer ist als die Ableitung der rechten Seite – wieder aus dem Monotoniesatz.

Die bewiesene Ungleichung (U) zeigt, dass wir den Unterschied zwischen unseren oberen und unteren Schranken für die Exponentialfunktion durch Wahl von n so klein machen können wie wir wollen. Damit sind diese Schranken sogar **Approximationen** der Exponentialfunktion von oben und unten (mit dem in (U) abgeschätzten Unterschied zwischen Ober- und Unterfunktionen):

$$\boxed{0 \le x < n \Rightarrow h_n(x) := (1+x/n)^n \le \exp(x) \le H_n(x) := 1/(1-x/n)^n.}$$

Für die Ableitung der durch Approximation bestimmten Exponentialfunktion siehe S.7.



Hiermit sind einige der verpassten Chancen in der Besprechung der Exponentialfunktion nachgeholt – mit Hilfe des Monotoniesatzes. Dieser auf der Schule unterschätzte Satz eignet sich für weitere Experimente mit dem TR. Die unterstützenden Formeln werden suggestiver, wenn man noch eine multiplikative Form des Monotoniesatzes – allein mit Hilfe von $(1/f)' = -f'/f^2$ – hinzufügt. Für positive Funktionen g, f und $0 \le x$ gilt

Behauptung: $\quad \dfrac{f'}{f} \le \dfrac{g'}{g} \;\Rightarrow\; \dfrac{g}{f}$ ist schwach wachsend, also $\dfrac{f(x)}{f(0)} \le \dfrac{g(x)}{g(0)}$.

Beweis: $\quad \left(\dfrac{g}{f}\right)' = (g \cdot \dfrac{1}{f})' = \dfrac{g'}{f} - \dfrac{gf'}{f^2} = \dfrac{g}{f} \cdot (\dfrac{g'}{g} - \dfrac{f'}{f}) \ge 0.$

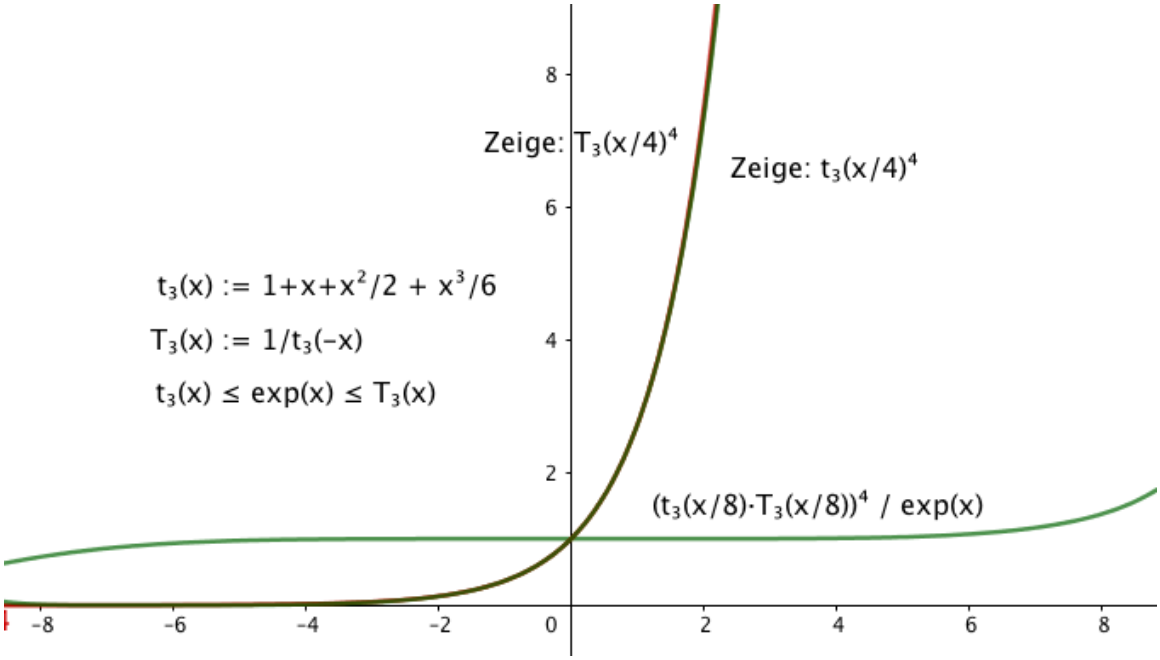
Beispiel: $\quad \dfrac{h_n'(x)}{h_n(x)} = \dfrac{1}{1+x/n} \le 1 \le \dfrac{1}{1-x/n} = \dfrac{H_n'(x)}{H_n(x)},\ 0 \le x < n.$

Experiment 1: Multipliziere $h_n(x/2) \le \exp(x/2)$ und $H_n(x/2) \ge \exp(x/2)$ und untersuche die Funktion $q_n(x) := h_n(x/2) \cdot H_n(x/2)$. Sie teilt mit der Exponentialfunktion die Symmetrie $q_n(-x) = 1/q_n(x)$. – Berechnung der Ableitung $q_n'(x)/q_n(x) = \frac{0.5}{1-x/2n} + \frac{0.5}{1+x/2n} = (1 - x^2/4n^2)^{-1} \ge 1$ erweist die q_n als Oberfunktionen und der Monotoniesatz zeigt, dass sie die Exponentialfunktion besser approximieren als h_n oder H_n, da q_n'/q_n näher an 1 ist.

Experiment 2: Beobachte für Polynome $P(x) = \sum_{n=0}^{\cdots} a_n \cdot x^n$, dass die Koeffizienten sich sehr einfach aus Ableitungswerten bei $x = 0$ ergeben:

$$a_0 = P(0),\ a_1 = P'(0),\ a_2 = \frac{P''(0)}{2},\ a_3 = \frac{P'''(0)}{6},\ a_4 = \frac{P^{(4)}(0)}{4!}, \ldots, a_n = P^{(n)}(0)/n!\,.$$

Wegen $\exp(0) = 1, \exp = \exp' = \exp'' = \ldots$ haben alle Ableitungen von exp bei $x = 0$ den Wert 1. Daher suggeriert die Beobachtung bei Polynomen, die Exponentialfunktion mit Polynomen zu vergleichen, die dieselben Ableitungen bei 0 haben.
Zeige für $t_3(x) := 1 + x + x^2/2 + x^3/6$ und $0 \le x$: $\quad t_3'/t_3 \le 1$ also $\quad t_3(x) \le \exp(x)$.
Zeige für $T_3(x) := 1/t_3(-x) = 1/(1 - x + x^2/2 - x^3/6)$ und $0 \le x \le 1.5$: $\quad \exp(x) \le T_3(x)$.



Experiment 3: Man kann die Approximationen $t_3(x) \le \exp(x) \le T_3(x)$ mit denselben Ideen wie vorher verbessern und dies mit dem Monotoniesatz beweisen.
Zeige, dass $t_3(x/n)^n$ Unterfunktion von exp ist. $(0 < e - t_3(1/8)^8 < 0{,}0002002.)$
Zeige, dass im Intervall $[0, 1.5n]$ wie eben $T_3(x/n)^n$ Oberfunktion von exp ist.

Experiment 4: Auch das Produkt $T_m(x) := t_3(x/2) \cdot T_3(x/2)$ liefert in $[0, 3]$ eine gute Oberfunktion, wieder mit der Symmetrie $T_m(-x) = 1/T_m(x)$.
Ist wie eben auch $T_m(x/n)^n$ eine Verbesserung? Wie sieht $T_m'(x)/T_m(x)$ aus?

Experiment 5: Kann man in Experiment 2 statt des kubischen Polynoms $t_3(x)$ auch ein Polynom $t_5(x)$ fünften Grades finden, das bis zur 5. Ableitung bei 0 dieselben Werte wie die Exponentialfunktion hat? Führt das zu besseren Approximationen? Berechne $t_5'(x)/t_5(x) = 1-?$.

Experiment 6: Ganz am Anfang hatten wir für $f(x) = 2^x$ und wenigstens für rationale h die Sehnensteigungen bei 0 betrachtet: $(2^h - 1)/h$. Es genügt nicht, wie in den Schulbüchern, h immer kleiner zu machen bis der TR aussteigt, um die Existenz der Ableitung bei 0 zu behaupten. Man muss zeigen, dass zwischen den linksseitigen und rechtsseitigen Sehnensteigungen nur eine einzige Zahl liegt. Schon Archimedes hat dazu argumentiert, dass es genügt, den Unterschied kleiner als $const/n$ machen zu können. Also:

$$0 \le \frac{2^{1/n} - 1}{1/n} - \frac{1 - 2^{-1/n}}{1/n} = n \cdot 2^{-1/n}(2^{2/n} - 2 \cdot 2^{1/n} + 1) \le n \cdot (2^{1/n} - 1)^2 \le 1/n,$$

$$\text{aber auch nach unten: } = n \cdot 2^{1/n}(1 - 2 \cdot 2^{-1/n} + 2^{-2/n}) \ge n \cdot (1 - 2^{-1/n})^2 \ge 0.25/n.$$

denn $2^{1/n} \le 1 + 1/n$ wegen $(1 + 1/n)^n \ge 1 + n \cdot 1/n = 2$,
ebenso $2^{-1/n} \le 1 - 0.5/n$ wegen $(1 - 0.5/n)^n \ge 1 - n \cdot 0.5/n = 2^{-1}$.
Erinnerung (Bernoulli): $-1 < x \Rightarrow (1 + x)^n \ge 1 + n \cdot x$ wegen des Monotoniesatzes.
Wenn der Taschenrechner den Abschätzungen der Differenz rechts- und linksseitiger Sehnensteigungen widerspricht, ist n zu groß und man sieht die Konsequenzen von Rundungsfehlern. (Ab Seite 8 allgemeinere Differenzen als $h = 1/n$.)

Also nicht: *Man kann zeigen, dass ...* sondern: *Wir können zeigen, dass ...*

Warnung. Ich habe eben benutzt: Wenn die ersten paar Ableitungen einer Differenzfunktion $f - P$ an einer Stelle a null sind, dann kann man erwarten, dass P in der Nähe von a eine gute Approximation von f ist. Das ist nur eine heuristische Strategie, denn die folgende Funktion hat bei $x = 0$ **alle** Ableitungen $= 0$.

$$f(0) := 0 \text{ und } f(x) := \exp(-1/x^2) \text{ für } x \ne 0.$$

Das wird mit Hilfe der oben besprochenen Ungleichung $(1+x/n)^n \le \exp(x)$ erklärt. Zuerst folgt $\exp(-x) = 1/\exp(x) \le 1/(1 + x/n)^n$. In diese Ungleichung setzen wir $1/x^2$ statt x ein:

$$0 \le \exp(-1/x^2) \le \frac{1}{(1 + 1/(nx^2))^n} = \frac{n^n \cdot x^{2n}}{(n \cdot x^2 + 1)^n} \le n^n \cdot x^{2n}.$$

Aus $n = 1,\ x \ne 0$ folgt: $0 \le f(x) \le x^2$; $f(0) = 0$ dehnt diese Abschätzung auf $x = 0$ aus.
Für $x \ne 0$ ergibt die Ableitung der Formel $f'(x) = 2x^{-3}\exp(-1/x^2)$, der Differenzenquotient bei 0 ist $x^{-1}\exp(-1/x^2)$; mit $n = 3$ sind die Beträge beider Terme $\le 54|x|^3$, aus dem Differenzenquotient folgt $f'(0) = 0$ und das passt auch zu der Ableitung der Formel. Höhere Ableitungen entsprechend.

Kennen wir wirklich die Ableitung der Exponentialfunktion?

Wir haben außer $\exp(0) = 1$ keine Werte der Exponentialfunktion explizit angegeben sondern sie nur als Grenzwerte durch Zitieren der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ definiert. Wie kann man so eine Funktion differenzieren? Im Standardaufbau der Analysis sieht man sich da einer erheblichen Maschinerie gegenüber. Deshalb ist es vielleicht eine Überraschung, dass es in diesem speziellen Fall so viel einfacher geht.

Schon unsere allererste Näherung

$$|x| < 1 \;\Rightarrow\; 1 + x \le \exp(x) \le (1 - x)^{-1}$$

besagt, dass die Exponentialfunktion im Intervall $|x| < 1$ zwischen einer rationalen Funktion und *deren Tangente* bei $x = 0$ verläuft. Aber daraus folgt die Differenzierbarkeit von exp bei $x = 0$ unmittelbar:

$$\exp'(0) = (1 + x)' = 1 = \exp(0).$$

Außerdem wissen wir schon aus der Diskussion von Exponentialfunktionen: Um sie an einer beliebigen Stelle zu differenzieren, genügt es, das Potenzgesetz $(a^{x+h} - a^x) = a^x \cdot (a^h - 1)$ und die Ableitung bei $x = 0$ zu kennen: $\big(a^x\big)' = \big(\lim_{h\to 0}(a^h - 1)/h\big) \cdot a^x$.

Das Potenzgesetz hängt nur von den Werten ab, sodass wir mit unseren Approximationen von Seite 4

$$h_n(x) := (1 + \frac{x}{n})^n \le \exp(x) \le (1 - \frac{x}{n})^{-n} =: H_n(x)$$

etwas anfangen können. Und die Ableitung $\exp'(0) = 1$ kennen wir schon. Wir zeigen:

$$(*) \qquad h_n(a + x) \le h_n(a) \cdot h_n(x) \quad \text{und} \quad H_n(a + x) \ge H_n(a) \cdot H_n(x).$$

Aus der ersten Ungleichung folgt $\exp(a + x) \le \exp(a) \cdot \exp(x)$,

aus der zweiten Ungleichung folgt $\exp(a + x) \ge \exp(a) \cdot \exp(x)$.

Beide zusammen ergeben $\exp(a + x) = \exp(a) \cdot \exp(x)$.

Beide Ungleichungen (*) folgen sofort aus dem multiplikativen Monotoniesatz (Seite 5), zunächst für $0 \le a, x$ und genügend großes $n > a + x$, denn

$$\frac{h_n'}{h_n}(a + x) = (1 + \frac{a + x}{n})^{-1} \;\le\; (1 + \frac{x}{n})^{-1} = \frac{h_n(a)}{h_n(a)} \cdot \frac{h_n'}{h_n}(x)$$
$$\frac{H_n'}{H_n}(a + x) = (1 - \frac{a + x}{n})^{-1} \;\ge\; (1 - \frac{x}{n})^{-1} = \frac{H_n(a)}{H_n(a)} \cdot \frac{H_n'}{H_n}(x).$$

Für $x < 0$ wird der Monotoniesatz in $[x, 0]$ benutzt. Beide Ungleichungen in (*) drehen sich um, sodass sich wieder $\exp(a + x) = \exp(a) \cdot \exp(x)$ ergibt.

Schließlich folgt $\exp(-x) = 1/\exp(x)$ aus der Approximation q_n mit derselben Symmetrie $q_n(-x) = 1/q_n(x)$ (siehe Experiment 1, Seite 5):

$$q_n(x) := h_n(x/2) \cdot H_n(x/2) \;\text{ mit }\; \frac{q_n'(x)}{q_n(x)} = (1 - x^2/4n^2)^{-1} \ge 1,$$

denn, falls $n > |x|/2$ gewählt wird, ist q_n eine bessere Approximation von exp als H_n.

Das beweist schließlich alle Fälle des Potenzgesetzes für exp, also für alle $a, x \in \mathbb{R}$. Damit ist dann auch die Differenzierbarkeit der Grenzwert-Funktion exp und $\exp' = \exp$ bewiesen.

Definition der Potenzen ohne Differentialrechnung

Auf den vorhergehenden Seiten wurde ein Zugang zu den Potenzen und Exponentialfunktionen beschrieben, dem so viel Differentialrechnung vorangeht, dass der Monotoniesatz für rationale Funktionen zur Verfügung steht. Da in den Schulbüchern die Potenzen vor der Differentialrechnung definiert werden – mit großen Lücken bei irrationalen Exponenten – soll hier dieser Zugang vollständig beschrieben werden, auch wenn die Lehrpläne von einer vollständigen Behandlung abgerückt sind. Interessierte mögen sich aussuchen, welche Details sie vorführen wollen.

Übersicht über die Schritte der Konstruktion

Schritt 1:
Für ganze Zahlen $n \geq 0$ ist a^n definiert als das Produkt von n Faktoren $a \in \mathbb{R}$. Für die Potenzgesetze muss man nur Faktoren zählen oder vertauschen.

Schritt 2:
Für negative ganz Zahlen $-n$ wird definiert $a \neq 0 \Rightarrow a^{-n} := 1/a^n$.
Mit dieser Definition gelten die Potenzgesetze für alle ganzen Exponenten $n \in \mathbb{Z}$.
Am wichtigsten ist: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, und auch $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

Schritt 3:
Für rationale Exponenten m/n wird zusätzlich $a \geq 0$ vorausgesetzt und dann definiert: $a^{m/n} := (\sqrt[n]{a})^m$. Es wird vorausgesetzt, dass der Umgang mit n-ten Wurzeln behandelt ist. Wichtig ist, dass erweiterte Brüche dasselbe Ergebnis liefern, also $(\sqrt[n]{a})^m = (\sqrt[n \cdot k]{a})^{m \cdot k}$. Damit lassen sich die Potenzgesetze auf rationale Exponenten ausdehnen. Danach ist das Rechnen mit rationalen Exponeten deutlich übersichtlicher als das Rechnen mit Wurzeln. (Bei negativen Exponenten: $a > 0$ statt $a \geq 0$.) (So weit auf Seite 1 vorausgesetzt.)

Schritt 4:
Um a^x für irrationale x zu definieren, beginnt man mit einer Intervallschachtelung $[x_n, y_n]$ für x. Dabei ist $\{x_n\}$ eine monoton wachsende Folge $\ldots x_n \leq x_{n+1} \leq \ldots \leq x$ und $\{y_n\}$ ist eine monoton fallende Folge $\ldots y_n \geq y_{n+1} \geq \ldots \geq x$. Außerdem muss $\{y_n - x_n\}$ eine *Nullfolge* sein. So weit handelt es sich um den ebenfalls vorausgesetzten Umgang mit Irrationalzahlen, die ja nur approximiert, aber nicht explizit hingeschrieben werden können. Es genügt, a^x für $a > 1$ zu definieren (wegen $(\frac{1}{a})^x = 1/a^x$).

Der entscheidende und in heutigen Schulbüchern leider fehlende Punkt ist:
Wie kann man einsehen, dass $\{a^{y_n} - a^{x_n}\}$ eine Nullfolge ist?

Durchführung der Konstruktion

Für alle Details braucht man für rationale $r, s \in \mathbb{Q}$ das Potenzgesetz $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ aus Schritt 3. Die Monotonie von $a^{x_n} \leq a^{x_{n+1}}$ und $a^{y_n} \geq a^{y_{n+1}}$ folgt daraus unmittelbar:

$$a > 1,\ 0 < r < s \quad \Rightarrow \quad a^s - a^r = a^r \cdot (a^{s-r} - 1) > 0, \text{ also } 1 < a^r < a^s.$$

Das einzige echte Problem (na ja, neben dem Verständnis der Vollständigkeit) ist die schon formulierte Frage:

Warum ist $\{a^{y_n} - a^{x_n}\}$ eine Nullfolge?

Da **keinerlei Differentialrechnung** benutzt werden kann, liegt nicht auf der Hand, wie man einsehen kann, dass $\{a^{y_n} - a^{x_n}\}$ eine Nullfolge ist! Ich zeige dazu folgende wichtige

Behauptung: $a > 1,\ h \in \mathbb{Q},\ 0 < h \leq 1 \ \Rightarrow\ 0 < a^h - 1 \leq (a-1) \cdot h.$

Folgerung: $0 < a^{y_n} - a^{x_n} = a^{x_n} \cdot (a^{y_n - x_n} - 1) \leq a^{y_1} \cdot (a-1) \cdot (y_n - x_n).$

Die Folgerung zeigt, dass $\{a^{y_n} - a^{x_n}\}$ wirklich eine Nullfolge ist! (Damit der Faktor vor $(y_n - x_n)$ nicht von n abhängt sondern konstant ist, habe ich noch $a^{x_n} \leq a^{y_1}$ benutzt.)

Der Beweis der Behauptung beruht auf zwei als Hilfssätze formulierten Beobachtungen:

Hilfssatz 1
Hat man eine monotone Folge reeller Zahlen $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots$,
so hat man einfache Ungleichungen zwischen den Mittelwerten benachbarter Zahlen, zum Beispiel:

$$x_0 < \frac{x_0 + x_1}{2} < \frac{x_0 + x_1 + x_3}{3} < \frac{x_0 + x_1 + x_2 + x_3}{4} < \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} < \frac{x_2 + x_3}{2} < x_3.$$

Allgemeiner: Für $m + k$ aufeinander folgende x_j ist der Mittelwert der ersten m Zahlen kleiner als der Mittelwert aller $m + k$ Zahlen und dieser ist kleiner als der Mittelwert der letzten k Zahlen. In Formeln:

$$\frac{1}{m} \cdot \sum_{j=1}^{m} x_j < \frac{1}{m+k} \cdot \sum_{j=1}^{m+k} x_j < \frac{1}{k} \cdot \sum_{j=m+1}^{m+k} x_j.$$

Hilfssatz 2
Sehnensteigungen über *mehrere* benachbarte Punkte hinweg sind **Mittelwerte** der Sehnensteigungen über den beteiligten benachbarten (äquidistanten) Punkten (nicht nur für Exponentialfunktionen):

$$\frac{f(h \cdot k) - f(0)}{k \cdot h} = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f((j+1) \cdot h) - f(j \cdot h)}{h},$$

$$\frac{a^{k \cdot h} - a^0}{k \cdot h} = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{a^{(j+1) \cdot h} - a^{j \cdot h}}{h}.$$

Die **Sehnensteigungen** von Exponentialfunktionen $f(x) := a^x$ mit $a > 1$ über benachbarten Punkten einer **äquidistanten** Folge von Argumenten $0 < h < 2h < 3h < \ldots < nh$ erfüllen die Voraussetzungen von Hilfssatz 1 mit $x_k := (a^{k \cdot h + h} - a^{k \cdot h})/h$. Denn:

$$x_k = \frac{a^{k \cdot h + h} - a^{k \cdot h}}{h} = a^{k \cdot h} \cdot \frac{a^h - a^0}{h} \quad < \quad a^{(k+1) \cdot h} \cdot \frac{a^h - a^0}{h} = x_{k+1}.$$

Daher gelten die Ungleichungen von Hilfssatz 1 für Mittelwerte dieser Sehnensteigungen. Nach Hilfssatz 2 sind die Sehnensteigungen über *mehrere* benachbarte Punkte solche Mittelwerte. Für $k < K$ ist daher die Sehnensteigung über den ersten k (äquidistanten) Punkten kleiner als die Sehnensteigung über den ersten K Punkten:

$$\frac{a^{k \cdot h} - a^0}{k \cdot h} < \frac{a^{K \cdot h} - a^0}{K \cdot h}.$$

Oder übersichtlicher: Für $0 < r < s \in \mathbb{Q}$ gilt unter Benutzung des Hauptnenners n, also mit $r = k/n,\ s = K/n,\ h = 1/n$ (Erinnerung $a > 1$) für die Sehnensteigungen der Exponentialfunktionen:

$$\boxed{0 < r < s \in \mathbb{Q} \ \Rightarrow\ \frac{a^r - a^0}{r} < \frac{a^s - a^0}{s}.}$$

Das wird mit $s = 1$ und der Umbenennung $h := r$ in die beabsichtigte Form, eben die Behauptung, gebracht:

$$h \in \mathbb{Q},\ 0 < h \leq 1 \ \Rightarrow\ 0 < a^h - a^0 \leq (a-1) \cdot h.$$

Mit nur wenig Übertreibung können wir also sagen: $\{[a^{x_n},\ a^{y_n}]\}$ ist eine Intervallschachtelung für a^x, weil zwei rationale Zahlen immer einen gemeinsamen Hauptnenner haben – denn ohne diese Eigenschaft der rationalen Zahlen bricht der Beweis zusammen.

Damit ist die Definition von a^x für alle $x \in \mathbb{R}$ beendet.

Nachdem a^x für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert ist, können die für $h \in \mathbb{Q}$ bewiesenen Ungleichungen für die Sehnensteigungen nicht mit dem *gegebenen* Beweis auf $h \in \mathbb{R}$ ausgedehnt werden. Man muss die Behauptungen für $h \in \mathbb{Q}$ voraussetzen und dann die Grenzwerteigenschaft

$$x_n \leq c \Rightarrow \lim x_n \leq c$$

benutzen. Ausführlicher:

$$\lim_n x_n = x,\ \lim_n y_n = y \text{ und } a^{x_n} \cdot a^{y_n} = a^{x_n + y_n} \ \Rightarrow\ a^x \cdot a^y = a^{x+y}.$$

Auf dieseselbe Weise werden alle für rationale Exponenten bewiesenen Eigenschaften auf reelle Exponenten ausgedehnt. Man bekommt so alle Potenzgesetze auch für reelle Exponenten und auch die bewiesene Monotonieeigenschaft für Sehnensteigungen gilt allgemein für **reelle** Intervalle:

$$a > 1,\ 0 < r < s \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad 0 < \frac{a^r - a^0}{r} < \frac{a^s - a^0}{s} < \frac{a^s - a^r}{s - r}.$$

Kommentar: **Nachträglich**, also wenn man für die Ableitungen $f' = c \cdot f, f'' > 0$ weiß, sind diese Ungleichungen eine einfache Folge des Monotoniesatzes – der Graph von f liegt unterhalb jeder Sehne und außerhalb der Sehne liegt der Graph oberhalb der verlängerten Sehne. Nachträglich liefert auch die Ableitung von $f(x) := a^x,\ f'(x) = \ln(a) \cdot a^x$ fast dieselbe Ungleichung, weil der Graph von f oberhalb der Tangente bei 0 liegt:

$$0 < h \leq 1 \ \Rightarrow\ 0 < \frac{a^0 - a^{-h}}{h} \leq f'(0) = \ln(a) \leq a - 1.$$

Die Differenzierbarkeit der Funktion $f_a(x) := a^x$.

Wir haben jetzt für alle reellen Exponenten die Potenzgesetze und daher für die Sehnensteigungen

$$\frac{f_a(x+h)-f_a(x)}{h} = f_a(x)\cdot\frac{f_a(h)-f_a(0)}{h} = a^x\cdot\frac{a^h-a^0}{h}.$$

Daher genügt es zum Differenzieren von f_a die Ableitung $f_a'(0)$ zu bestimmen. Das liefert dann:

$$f_a' = f_a'(0)\cdot f_a.$$

Für die Bestimmung von $f_a'(0)$ sind die bisherigen Argumente gut genug. Zunächst kann die äquidistante Punktfolge aus "Drittens" links von 0 fortgesetzt werden: $\ldots < -2h < -h < 0 < \ldots$. Das dehnt die Monotonie der Sehnensteigungen aus von den rechtsseitigen auch auf die **links**seitigen Sehnen $(a>1,\ (a^x-a^{x-h})/h)$:

$$0<r<s\in\mathbb{R}\ \Rightarrow\ 0<\frac{a^0-a^{-s}}{s}<\frac{a^0-a^{-r}}{r}<(f_a'(0)\text{ existiert?})<\frac{a^r-a^0}{r}<\frac{a^s-a^0}{s}.$$

Die dazu gehörige **Differenzabschätzung** zwischen rechts– und linksseitigen Sehnensteigungen verbessert frühere Ungleichungen (hier: $r\in\mathbb{R},\ 0<r\le 1\Rightarrow(a^r-a^0)\le(a-1)\cdot r$) und führt zur Berechnung der Ableitung $f_a'(0)$ der reellen Funktion $f_a(x)=a^x, (a>1)$:

$$0<\frac{a^r-a^0}{r}-\frac{a^0-a^{-r}}{r}=a^{-r}\cdot\frac{(a^r-a^0)^2}{r}\le 1\cdot(a-1)^2\cdot r^2/r=(a-1)^2\cdot r$$

d.h. $\quad 0<$ rechtsseitige minus linksseitige Sehnensteigung $\le\ (a-1)^2\cdot r,$

also $\quad f_a'(0)=\lim\limits_{r\to0}\dfrac{a^r-a^0}{r}=\lim\limits_{r\to0}\dfrac{a^0-a^{-r}}{r}=\lim\limits_{r\to0}\dfrac{a^r-a^{-r}}{2r}$ existiert.

Es lohnt sich, mit dem TR anzusehen, wie viel besser die symmetrischen Sehnensteigungen den Grenzwert approximieren. Berechne für einige Werte von $r\in[10^{-5},10^{-2}]$:

$$\frac{a^0-a^{-r}}{r}<(\ f_a'(0)\ )<\frac{a^r-a^{-r}}{2r}<\frac{a^r-a^0}{r}.$$

Und wer richtig staunen will, wozu die Analysis in der Lage ist, der berechne für $r=0.01$ zehnstellig: $\quad (f_a'(0)$ steht in Klammern, weil der TR den Grenzwert nicht ausrechnet.)

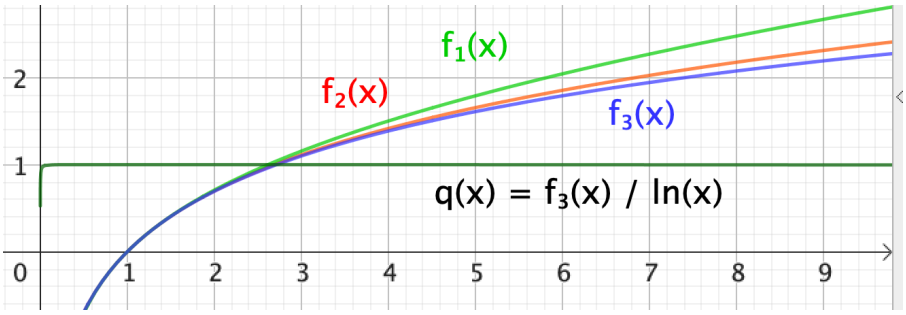
$$\frac{1}{3}\left(4\frac{a^r-a^{-r}}{2r}-\frac{a^{2r}-a^{-2r}}{4r}\right)<(f_a'(0))<\frac{a^r-a^{-r}}{2r}\quad\text{(Vergleiche Text A5, S.6).}$$

$$f_1(x)=\frac{x^{0.5}-x^{-0.5}}{1}$$

$$f_2(x)=\frac{x^{0.25}-x^{-0.25}}{0.5}$$

$$f_3(x)=\frac{4f_2(x)-f_1(x)}{3}$$

Definition $\ln(x)$ S.11



Kurzer Ausblick auf den Logarithmus

Wir setzen in diesem Ausblick voraus, dass die Differentialrechnung bis zum Monotomiesatz behandelt ist, so dass folgendes wichtige Argument zur Verfügung steht:

Hat eine Funktion auf einem Intervall die Ableitung 0*, so ist sie dort konstant.*

Dann wissen wir von S.2, dass zwei Funktionen $f, g > 0$ mit $f' = f, g' = g, f(0) = 1 = g(0)$ auf jedem Definitionsintervall, das 0 enthält, übereinstimmen, *natürliche Exponentialfunktion* heißen und $x \mapsto \exp(x)$ geschrieben werden.
Der natürliche Logarithmus ln(.) wird meistens als Umkehrfunktion von exp(.) definiert. Dazu muss der Begriff Umkehrfunktion definiert werden. Danach besteht dann die Schwierigkeit, dass man die Werte der Umkehrfunktion fast nie ausrechnen kann sondern approximieren muss. Das ist schon bei dem einfachen Polynom $P(x) = x^2$ so: Für die Umkehrfunktion braucht man (an den meisten Stellen) *irrationale* Quadratwurzeln.
In unserer Situation haben wir eigentlich die Umkehrfunktion von exp schon zur Verfügung, wir haben es nur noch nicht bemerkt.

Da wir eben die Exponentialfunktionen $f_a(x) := a^x$ differenziert haben, nämlich

$$f_a' = f_a'(0) \cdot f_a,$$

können wir mit Hilfe der Potenzregeln eine einfache Beziehung zur natürlichen Exponentialfunktion herstellen. Beachte dazu:
Für die Funktion $g(x) := f_a\big(x/f_a'(0)\big)$ gilt: $g(0) = 1,\ g' = g$, also $g = \exp$. Wir haben also:

$$e^x = \exp(x) = f_a\big(\frac{x}{f_a'(0)}\big) = a^{x/f_a'(0)} = \Big(a^{1/f_a'(0)}\Big)^x, \text{ insbesondere } e := a^{1/f_a'(0)}.$$

Daraus folgt mit $x = f_a'(0)$:

$$\forall_{a\in\mathbb{R}}\ \exp(f_a'(0)) = f_a(1) = a^1 = a.$$

Mit anderen Worten: Die Funktion $0 < a \mapsto f_a'(0)$ ist schon **Umkehrfunktion** von exp. Sie trägt den Namen **ln**. Üblicher Weise wird die Argumentvariable einer Funktion mit x bezeichnet. In unserer Herleitung war $a \in \mathbb{R}_+$ Parameter der Funktionen f_a. Da im Folgenden x nicht mehr als Argument von f_a auftritt, können wir die Umkehrfunktion auch schreiben als $0 < x \mapsto f_x'(0) =: \ln(x)$. Trotz dieser Gleichheitszeichen haben wir keine Berechnungsformel für $\ln(x)$ erhalten, sondern eine Grenzwertformel:

$$x > 0: \quad \ln(x) := f_x'(0) = \lim_{r\to 0} \frac{x^r - x^{-r}}{2r}.$$

Die symmetrischen Sehnensteigungen approximieren den Grenzwert viel besser als die rechtsseitigen oder linksseitigen Sehnensteigungen, aber die Ungleichungen

$$\frac{1 - x^{-r}}{r} < \ln(x) < \frac{x^r - 1}{r} \quad \text{helfen z.B. beim Berechnen der Ableitung von ln.}$$

Die **Logarithmusregeln** folgen direkt aus den Potenzregeln:

$$e^{\ln(a)+\ln(b)} = e^{\ln(a)} \cdot e^{\ln(b)} = a \cdot b = e^{\ln(a\cdot b)} \quad \text{also:} \quad \ln(a) + \ln(b) = \ln(a \cdot b),$$
$$e^{\ln(a)\cdot r} = (e^{\ln(a)})^r = a^r = e^{\ln(a^r)} \quad \text{also:} \quad \ln(a) \cdot r = \ln(a^r).$$

Die **Ableitung** von ln erhält man am schnellsten aus der Ableitungsregel für Umkehrfunktionen (falls diese Regel bekannt ist):

$$f' > 0,\ x \in \mathrm{DefBer}(g),\ f(g(x)) = x \ \Rightarrow\ f'(g(x)) \cdot g'(x) = 1, \quad \text{also } g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))},$$

daher:
$$\ln'(x) = \frac{1}{\exp'(\ln(x))} = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x}.$$

Wenn diese Regel nicht behandelt ist, kann man die Ableitung mit den angegebenen Abschätzungen durch die links- und rechtsseitigen Sehnensteigungen bestimmen. Wähle $1+x$ statt x als Argument, benutze die abschätzenden Sehnensteigungen mit $r = 1$ und erhalte folgende Schranken für $\ln(1+x)$:

$$1 + x > 0 \ \Rightarrow\ \frac{x}{1+x} = \frac{1-(1+x)^{-1}}{1} \le \ln(1+x) \le \frac{(1+x)^1 - 1}{1} = x.$$

Berechne damit obere und untere Schranken des Differenzenquotienten bei $x > 0$:

$$\frac{\ln(x+h) - \ln(x))}{h} = \frac{1}{h} \cdot \ln(1 + h/x) \le \frac{1}{h} \cdot \frac{h}{x} = \frac{1}{x}$$
$$\ldots\ldots \ge \frac{1}{h} \cdot \frac{h/x}{1 + h/x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1 + h/x}$$

und folgere daraus schließlich:

$$\ln'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} = \frac{1}{x}.$$